



Olimpiada Națională de Matematică 2023

Etapa locală - Iași, 10 februarie 2023

Clasa a IX –a

Barem de notare și evaluare

Problema 1. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A = \left\{ \left\{ \frac{n^2}{5} \right\} + \left\{ \frac{n^2}{7} \right\} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Gazeta Matematică 9/2022

Soluție:

La împărțirea lui n^2 cu 5, se obțin trei resturi 0 sau 1 sau 4, deci $\left\{ \frac{n^2}{5} \right\} \in \left\{ 0, \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right\}$	2p
La împărțirea lui n^2 cu 7, se obțin patru resturi 0 sau 1 sau 2 sau 4, deci $\left\{ \frac{n^2}{7} \right\} \in \left\{ 0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7} \right\}$	2p
Toate cele 12 perechi se regăsesc în $\left\{ \frac{n^2}{5} \right\} + \left\{ \frac{n^2}{7} \right\}$ cu valori diferite ale sumei	2p
Mulțimea A are 12 elemente	1p

Problema 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-2023| = 2024(x-2022)$$

Soluție:

Deoarece membrul stâng este nenegativ, rezultă că și membrul drept este nenegativ, deci $x \geq 2022$ Apar cazurile $x \in [2022, 2023)$, $x \in [2023, +\infty)$	2p
Cazul 1: Dacă $x \in [2022, 2023)$, atunci $(x-1) + (x-2) + \dots + (x-2022) + (2023-x) = 2024(x-2022)$	1p
$2021x - \frac{2021 \cdot 2022}{2} + 1 = 2024x - 2022 \cdot 2024 \Leftrightarrow 3x = 2022 \cdot 2024 - 2021 \cdot 1011 + 1$ $3x = 1011 \cdot (4048 - 2021) + 1 \Leftrightarrow 3x = 1011 \cdot 2027 + 1 \Leftrightarrow x = 337 \cdot 2027 + \frac{1}{3} \notin [2022, 2023)$	1p
Cazul 2: Dacă $x \in [2023, +\infty)$, atunci $(x-1) + (x-2) + \dots + (x-2022) + (x-2023) = 2024(x-2022)$	1p
$2023x - \frac{2023 \cdot 2024}{2} = 2024x - 2022 \cdot 2024 \Leftrightarrow x = 2022 \cdot 2024 - 2023 \cdot 1012$ $x = 1012 \cdot (4044 - 2023) \Leftrightarrow x = 1012 \cdot 2021 = 2045252 \in [2023, +\infty)$	1p
Mulțimea soluțiilor este $S = \{2045252\}$	1p

Problema 3. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a \cdot b \cdot c = 1$. Demonstrați

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b^2+c^2}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+c^2+a^2}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+a^2+b^2}} \leq 1 \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+2bc}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+2ca}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+2ab}}.$$

Soluție:

Conform inegalității mediilor $b+c \geq 2\sqrt{bc}$	1p
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+2bc}} = \frac{a}{a+2\sqrt{ab^2c^2}} = \frac{a}{a+2\sqrt{bc}} \geq \frac{a}{a+b+c}$	1p
Finalizare partea a doua a inegalității	1p
$b^2+c^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2} \geq (b+c)\sqrt{bc}$	1p
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b^2+c^2}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+(b+c)\sqrt{bc}}} = \frac{a}{a+b+c}$	1p
Finalizare partea întâi a inegalității	1p
Egalitatea are loc pentru $a=b=c=1$	1p

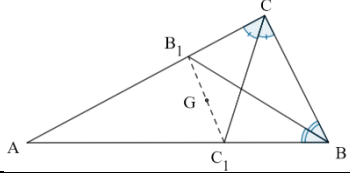
Problema 4. Se consideră triunghiul oarecare ABC cu centrul de greutate G , $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, B_1 este piciorul bisectoarei din B , iar C_1 este piciorul bisectoarei din C .

a) Demonstrați că $\overrightarrow{GB_1} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2c-a}{3(a+c)} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Arătați că dacă $a \neq 2b$, $a \neq 2c$, atunci B_1, G, C_1 sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Gazeta Matematică 3/2011

Soluție:

a) Din teorema bisectoarei $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{AB_1}{AC} = \frac{c}{a+c}$ $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC}$ au aceeași direcție și același sens $\Rightarrow \overrightarrow{AB_1} = \frac{c}{a+c} \overrightarrow{AC}$		1p
G centrul de greutate al triunghiului ABC , rezultă $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul lui BC , dar $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$		1p
$\overrightarrow{GB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AG} = \frac{c}{a+c} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2c-a}{3(a+c)} \cdot \overrightarrow{AC}$		1p
b) Din a) $\overrightarrow{GB_1} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2c-a}{3(a+c)} \cdot \overrightarrow{AC}$ și analog $\overrightarrow{GC_1} = \frac{2b-a}{3(a+b)} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$		1p
B_1, G, C_1 sunt coliniare $\Leftrightarrow \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2b-a}{3(a+b)}} = \frac{\frac{2c-a}{3(a+c)}}{-\frac{1}{3}}$		2p
$\Leftrightarrow (a+b)(a+c) = (2b-a)(2c-a) \Leftrightarrow bc = ac + ab \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$		1p